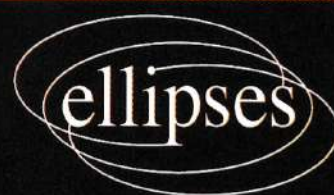


**BCPST-VETO**

**1<sup>re</sup> année**

# **Problèmes de MATHÉMATIQUES**

**Gilbert DAMIN**



# Liste des thèmes

|          |                                                       |           |
|----------|-------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Trigonométrie - Nombres complexes</b>              | <b>1</b>  |
| 1.1      | Application de $\mathbb{C}$ dans lui-même - QCM       | 1         |
| 1.2      | Similitude dans $\mathbb{C}$                          | 6         |
| 1.3      | Droite et cercle d'Euler                              | 9         |
| <b>2</b> | <b>Courbes paramétrées</b>                            | <b>14</b> |
| 2.1      | Fraction rationnelle                                  | 14        |
| 2.2      | Paramétrage d'une parabole                            | 17        |
| 2.3      | Paramétrage d'une hyperbole                           | 21        |
| <b>3</b> | <b>Compléments de géométrie</b>                       | <b>25</b> |
| 3.1      | Coordonnées barycentriques d'un triangle              | 25        |
| 3.2      | Quelques théorèmes de géométrie                       | 28        |
| <b>4</b> | <b>Calcul matriciel</b>                               | <b>35</b> |
| 4.1      | Equation matricielle                                  | 35        |
| 4.2      | Puissance $n^{\text{ème}}$ d'une matrice stochastique | 37        |
| 4.3      | Puissance $r^{\text{ème}}$ d'une matrice              | 40        |
| <b>5</b> | <b>Systèmes linéaires</b>                             | <b>44</b> |
| 5.1      | Equations de plans                                    | 44        |
| 5.2      | Résolution d'un système paramétrique                  | 49        |
| <b>6</b> | <b>Espaces vectoriel <math>\mathbb{K}^n</math></b>    | <b>52</b> |
| 6.1      | Familles de vecteurs                                  | 52        |
| 6.2      | Changement de base                                    | 61        |
| <b>7</b> | <b>Applications linéaires</b>                         | <b>66</b> |
| 7.1      | Composition d'applications linéaires                  | 66        |
| 7.2      | Endomorphisme de $\mathbb{R}^4$                       | 71        |
| <b>8</b> | <b>Polynômes</b>                                      | <b>78</b> |
| 8.1      | Racine carrée à la main                               | 78        |
| 8.2      | Suite linéaire et polynôme                            | 85        |
| <b>9</b> | <b>Suites numériques</b>                              | <b>90</b> |
| 9.1      | Méthode de Babylone                                   | 90        |
| 9.2      | Récurrence non linéaire                               | 94        |
| 9.3      | Récurrence irrationnelle                              | 98        |

|                                                            |            |
|------------------------------------------------------------|------------|
| <b>10 Algorithmique</b>                                    | <b>102</b> |
| 10.1 Méthode de l'abaque à points alignés . . . . .        | 102        |
| 10.2 Equation du 4 <sup>ème</sup> degré . . . . .          | 108        |
| <b>11 Fonctions</b>                                        | <b>113</b> |
| 11.1 Fonction et calcul matriciel . . . . .                | 113        |
| 11.2 Densité de probabilité . . . . .                      | 120        |
| <b>12 Limites</b>                                          | <b>125</b> |
| 12.1 Utilisation de DL . . . . .                           | 125        |
| 12.2 Définitions des limites . . . . .                     | 127        |
| 12.3 Limite et suite itérée . . . . .                      | 133        |
| <b>13 Continuité</b>                                       | <b>138</b> |
| 13.1 Fonction partie entière . . . . .                     | 138        |
| 13.2 Application réciproque . . . . .                      | 141        |
| 13.3 Une fonction à simplifier . . . . .                   | 143        |
| 13.4 Zéro d'une fonction . . . . .                         | 148        |
| <b>14 Dérivées</b>                                         | <b>153</b> |
| 14.1 Fonction arccos . . . . .                             | 153        |
| 14.2 Fonction arctan . . . . .                             | 156        |
| 14.3 Suite de Césaro . . . . .                             | 161        |
| <b>15 Développements limités</b>                           | <b>166</b> |
| 15.1 Fonctions dans $\mathbb{C}$ . . . . .                 | 166        |
| 15.2 Taylor pour les polynômes . . . . .                   | 174        |
| 15.3 $DL_3(0)$ de $\ln(1+x)$ . . . . .                     | 178        |
| 15.4 Recherche d'asymptotes . . . . .                      | 182        |
| <b>16 Logarithme et exponentielle</b>                      | <b>189</b> |
| 16.1 Utilisation du DL de la fonction $\ln(1+x)$ . . . . . | 189        |
| 16.2 Résolution d'une équation . . . . .                   | 194        |
| 16.3 Série et produit infini . . . . .                     | 197        |
| <b>17 Calcul intégral</b>                                  | <b>201</b> |
| 17.1 Divers changements de variables . . . . .             | 201        |
| 17.2 Formule de Stirling . . . . .                         | 204        |
| 17.3 Orthogonalisation de Schmitt . . . . .                | 211        |
| <b>18 Equations différentielles</b>                        | <b>215</b> |
| 18.1 Fonction argument sinus hyperbolique . . . . .        | 215        |
| 18.2 Equation du premier ordre . . . . .                   | 219        |
| 18.3 Equation du second ordre . . . . .                    | 222        |
| 18.4 Equation différentielle et probabilités . . . . .     | 226        |

|           |                                                  |            |
|-----------|--------------------------------------------------|------------|
| 18.5      | Variation des constantes . . . . .               | 231        |
| 18.6      | Dynamique avec frottement . . . . .              | 234        |
| <b>19</b> | <b>Fonctions de plusieurs variables</b>          | <b>238</b> |
| 19.1      | Le prisme . . . . .                              | 238        |
| 19.2      | Fonction de production de Cobb-Douglas . . . . . | 243        |
| <b>20</b> | <b>Ensembles</b>                                 | <b>250</b> |
| 20.1      | Surjections de $E$ sur $F$ . . . . .             | 250        |
| 20.2      | Approximations de $\pi$ . . . . .                | 255        |
| <b>21</b> | <b>Analyse combinatoire</b>                      | <b>261</b> |
| 21.1      | Sommes de puissances . . . . .                   | 261        |
| 21.2      | Formules de dénombrement . . . . .               | 265        |
| <b>22</b> | <b>Introduction aux probabilités</b>             | <b>270</b> |
| 22.1      | Des histoires d'œufs . . . . .                   | 270        |
| 22.2      | Un TIPE en antarctique . . . . .                 | 273        |
| 22.3      | Lancer de deux pièces d'un euro . . . . .        | 277        |
| 22.4      | Sémaphore d'entrée de port . . . . .             | 282        |
| <b>23</b> | <b>Variables aléatoires discrètes</b>            | <b>288</b> |
| 23.1      | Suite de v.a.d . . . . .                         | 288        |
| 23.2      | Prophylaxie dans une bergerie . . . . .          | 291        |
| 23.3      | Tirages aléatoires . . . . .                     | 296        |
| 23.4      | Comportement d'une grenouille en TIPE . . . . .  | 299        |
| <b>24</b> | <b>Lois discrètes</b>                            | <b>306</b> |
| 24.1      | Loi uniforme et couple . . . . .                 | 306        |
| 24.2      | Loi binomiale et couple . . . . .                | 310        |