

Damien LAMBERTON
Bernard LAPEYRE

INTRODUCTION
AU CALCUL
STOCHASTIQUE
APPLIQUÉ
À LA FINANCE

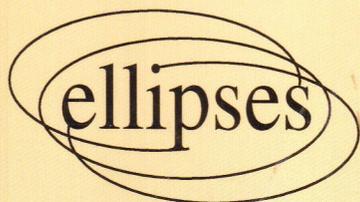


Table des matières

Introduction	9
1 Le problème des options	9
2 La notion d'arbitrage et la relation de parité call-put	10
3 Le modèle de Black-Scholes et ses extensions	11
4 Plan du livre	11
5 Remerciements	12
1 Modèles discrets	13
1 Le formalisme des modèles discrets	13
1.1 Les actifs financiers	13
1.2 Les stratégies	13
1.3 Stratégies admissibles et arbitrage	15
2 Martingales et arbitrages	16
2.1 Martingales et transformées de martingales	16
2.2 Marchés financiers viables	17
3 Marchés complets et évaluation des options	19
3.1 Marchés complets	19
3.2 Evaluation et couverture des actifs conditionnels dans les marchés complets	21
3.3 Première approche des options américaines	22
4 Problème corrigé : le modèle de Cox, Ross et Rubinstein	23
2 Problème d'arrêt optimal et options américaines	29
1 Notion de temps d'arrêt	29
2 Enveloppe de Snell	30
3 Décomposition des surmartingales	32
4 Enveloppe de Snell et chaînes de Markov	34
5 Application aux options américaines	34
5.1 Exercice et couverture des options américaines	35
5.2 Options américaines et options européennes	36
6 Exercices	37
3 Mouvement brownien et équations différentielles stochastiques	41
1 Généralités sur les processus à temps continu	41
2 Le mouvement brownien	43
3 Martingales à temps continu	44
4 Intégrale stochastique et calcul d'Itô	46
4.1 Construction de l'intégrale stochastique	47
4.2 Calcul d'Itô	52

3.3	Exemples d'utilisation de la formule d'Itô	54
3.4	Formule d'Itô multidimensionnelle	57
Equations différentielles stochastiques		58
3.1	Théorème d'Itô	58
3.2	Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck	60
3.3	Equations différentielles stochastiques à valeurs vectorielles	61
3.4	Propriété de Markov des solutions d'équations différentielles stochastiques	62
Exercices		64
Modèle de Black et Scholes		69
Description du modèle		69
1.1	L'évolution des cours	69
1.2	Les stratégies autofinancées	70
Changement de probabilité. Théorème de représentation des martingales		71
2.1	Probabilités équivalentes	71
2.2	Théorème de Girsanov	72
2.3	Théorème de représentation des martingales browniennes	72
Evaluation et couverture des options dans le modèle de Black et Scholes		73
3.1	Une probabilité sous laquelle (S_t) est une martingale	73
3.2	Pricing	73
3.3	Couverture des calls et des puts	76
Options américaines dans le modèle de Black-Scholes		77
4.1	Evaluation des options américaines	77
4.2	Puts perpétuels, prix critique	79
Exercices		82
Calcul des prix d'options et équations aux dérivées partielles		97
Calculs de prix d'options européennes pour les modèles de diffusion		97
1.1	Générateur infinitésimal d'une diffusion	98
1.2	Calculs d'espérances et équations aux dérivées partielles	100
1.3	Le cas du modèle de Black et Scholes	102
1.4	Equation aux dérivées partielles sur un ouvert borné et calcul d'espérance	103
Résolution numérique des équations paraboliques		104
2.1	Localisation	105
2.2	La méthode des différences finies	106
Le problème des options américaines		110
3.1	Formulation du problème	110
3.2	Le put américain dans le modèle de Black et Scholes	112
3.3	La méthode binomiale pour le calcul du put américain	115
Exercices		116
Modèles de taux d'intérêt		119
Principes de la modélisation		119
1.1	Notion de courbe des taux	119
1.2	Courbe des taux en avenir incertain	120
1.3	Options sur obligations	122
Quelques modèles usuels		124

2.1	Le modèle de Vasicek	124
2.2	Le modèle de Cox-Ingersoll-Ross	126
2.3	Autres modèles	129
3	Exercices	131
7 Modèles d'actifs avec sauts		135
1	Processus de Poisson	135
2	Description de l'évolution de l'actif risqué	137
3	Evaluation et couverture des options	142
3.1	Les stratégies admissibles	142
3.2	Pricing	145
3.3	Prix des calls et des puts	145
3.4	Couverture des calls et des puts	146
4	Exercices	149
8 Simulation et algorithmes pour les modèles financiers		151
1	Simulation et modèles financiers	151
1.1	La méthode de Monte Carlo	151
1.2	Simulation d'une loi uniforme sur $[0, 1]$	152
1.3	Simulation des variables aléatoires	152
1.4	Simulation de processus stochastiques	155
2	Quelques algorithmes utiles	157
2.1	Approximation de la fonction de répartition d'une gaussienne	157
2.2	Implémentation informatique de la méthode de Brennan et Schwartz	158
2.3	L'algorithme de Cox Ross pour le calcul du prix d'une option américaine	159
3	Exercices	160
Appendice		163
1	Variables aléatoires gaussiennes	163
1.1	Gaussiennes réelles	163
1.2	Vecteurs gaussiens	163
2	Espérance conditionnelle	164
2.1	Exemples de sous-tribus	164
2.2	Propriétés de l'espérance conditionnelle	165
2.3	Calculs d'espérances conditionnelles	166
3	Théorème de séparation des convexes	167
Bibliographie		169
Index		173