

Thierry Gallouët  
Raphaèle Herbin

# MESURE, INTÉGRATION, PROBABILITÉS



ellipses

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Motivation et objectifs</b>	<b>9</b>
1.1	Intégrale des fonctions continues	9
1.2	Insuffisance de l'intégrale des fonctions continues	11
1.3	Les probabilités	14
1.4	Objectifs	15
1.5	Structure du cours	15
1.6	Exercices	16
<b>2</b>	<b>Tribus et mesures</b>	<b>35</b>
2.1	Introduction	35
2.2	Tribu ou $\sigma$ algèbre	36
2.3	Mesure, probabilité	41
2.4	Mesure signée	48
2.5	La mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens	52
2.6	Indépendance et probabilité conditionnelle	63
2.7	Exercices	69
<b>3</b>	<b>Fonctions mesurables, variables aléatoires</b>	<b>109</b>
3.1	Introduction, topologie sur $\overline{\mathbb{R}}$	109
3.2	Fonctions étagées	111
3.3	Fonctions mesurables et variables aléatoires	113
3.4	Mesure image, loi d'une v.a., v.a. indépendantes	120
3.5	Convergence p.p., p.s., en mesure, en probabilité	123
3.6	Exercices	127
<b>4</b>	<b>Fonctions intégrables</b>	<b>157</b>
4.1	Intégrale d'une fonction étagée positive	158
4.2	Intégrale d'une fonction mesurable positive	160
4.3	Convergence monotone et lemme de Fatou	165
4.4	Mesures et probabilités de densité	168

4.5	L'espace $\mathcal{L}^1$ des fonctions intégrables	170
4.6	L'espace $L^1$	174
4.7	Théorèmes de convergence dans $L^1$	177
4.8	Continuité et dérivabilité sous le signe d'intégration	183
4.9	Espérance et moments des variables aléatoires	185
4.10	Espace $L^1_{\mathbb{C}}(E, T, m)$ et espace $L^1_{\mathbb{R}^N}(E, T, m)$	189
4.11	Exercices	192
<b>5</b>	<b>Intégrale sur les boréliens de <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>243</b>
5.1	Intégrale de Lebesgue et intégrale des fonctions continues	243
5.2	Mesures abstraites et mesures de Radon	245
5.3	Changement de variable, densité et continuité	252
5.4	Intégrales impropres des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$	256
5.5	Exercices	256
<b>6</b>	<b>Les espaces <math>L^p</math></b>	<b>275</b>
6.1	Définitions et premières propriétés	275
6.2	Analyse hilbertienne et espace $L^2$	288
6.3	Dualité dans les espaces $L^p$ , $1 \leq p \leq \infty$	310
6.4	Convergence faible, faible-*, étroite, en loi	319
6.5	Exercices	330
<b>7</b>	<b>Produits d'espaces mesurés</b>	<b>411</b>
7.1	Motivation	411
7.2	Mesure produit	412
7.3	Théorèmes de Fubini-Tonelli et Fubini	417
7.4	Mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens de $\mathbb{R}^N$	422
7.5	Convolution	425
7.6	Formules de changement de variable	430
7.7	Exercices	433
<b>8</b>	<b>Densité, séparabilité et compacité</b>	<b>465</b>
8.1	Théorèmes de densité pour les espaces $L^p(\Omega)$	465
8.2	Séparabilité de $L^p(\Omega)$	470
8.3	Compacité dans les espaces $L^p(\Omega)$	471
8.4	Compacité faible-*	472
8.5	Exercices	475
<b>9</b>	<b>Vecteurs aléatoires</b>	<b>487</b>
9.1	Définition, propriétés élémentaires	487
9.2	Indépendance	493

## TABLE DES MATIÈRES

9.3	Vecteurs gaussiens . . . . .	497
9.4	Exercices . . . . .	498
<b>10</b>	<b>Transformation de Fourier</b>	<b>513</b>
10.1	Introduction et notations . . . . .	513
10.2	Transformation de Fourier dans $L^1$ . . . . .	514
10.3	Transformée de Fourier d'une mesure signée . . . . .	518
10.4	Transformation de Fourier dans $L^2$ . . . . .	521
10.5	Résolution d'une E.D.O ou d'une E.D.P . . . . .	523
10.6	Fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire . . . . .	524
10.7	Exercices . . . . .	531
<b>11</b>	<b>Espérance conditionnelle et martingales</b>	<b>549</b>
11.1	Espérance conditionnelle . . . . .	549
11.2	Martingales . . . . .	558
11.3	Exercices . . . . .	561
	<b>Références</b>	<b>595</b>
	<b>Index</b>	<b>596</b>