

# MÉCANIQUE Des Milieux Continus

## Une Introduction

*Cours et Exercices Corrigés*

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{b^2}{a^2 - b^2} \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) P$$



*Cours et Exercices Corrigés*

OFFICE DES PUBLICATIONS UNIVERSITAIRES



# SOMMAIRE

|                                                                           |    |
|---------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>AVANT-PROPOS</b> .....                                                 | 3  |
| <b>SOMMAIRE</b> .....                                                     | 5  |
| <b>NOTATIONS UTILISEES</b> .....                                          | 9  |
| <b>PERSPECTIVE HISTORIQUE</b> .....                                       | 15 |
| <br><b>Chapitre 1 INTRODUCTION A LA MECANIQUE</b>                         |    |
| <b>DES MILIEUX CONTINUS</b> .....                                         | 29 |
| 1.1 Introduction.....                                                     | 29 |
| 1.2 Milieu continu.....                                                   | 30 |
| 1.3 Exemples de problèmes traités par la MMC.....                         | 31 |
| 1.4 Lois de conservation.....                                             | 34 |
| 1.5 Equations de constitution.....                                        | 35 |
| 1.6 Exercices.....                                                        | 37 |
| <br><b>Chapitre 2 LE MOUVEMENT ET SES</b>                                 |    |
| <b>REPRESENTATIONS</b> .....                                              | 41 |
| 2.1 Introduction.....                                                     | 41 |
| 2.2 Mouvement des corps déformables.....                                  | 41 |
| Exercices.....                                                            | 55 |
| <br><b>Chapitre 3 CONTRAINTES ET EQUATIONS DU MOUVEMENT</b> .....         | 63 |
| 3.1 Introduction.....                                                     | 63 |
| 3.2 Forces dans le milieu continu.....                                    | 63 |
| 3.3 Formes intégrales des équations du mouvement.....                     | 66 |
| 3.4 Contraintes dans un référentiel cartésien.....                        | 69 |
| 3.5 Equation du mouvement.....                                            | 70 |
| 3.6 Conséquences de l'équation de conservation du moment de rotation..... | 74 |
| Exercices.....                                                            | 74 |
| <br><b>Chapitre 4 TENSEURS CARTESIENS ET CONTRAINTE 3</b> .....           | 87 |
| 4.1 Introduction.....                                                     | 87 |
| 4.2 Notation tensorielle ou indicielle.....                               | 87 |



|                                                     |                                                            |            |
|-----------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|------------|
| 4.3                                                 | Tenseurs cartésiens.....                                   | 89         |
| 4.4                                                 | Tenseur des contraintes.....                               | 98         |
| 4.5                                                 | Rappel sur les valeurs et vecteurs propres.....            | 101        |
| 4.6                                                 | Contraintes principales et axes principaux.....            | 103        |
| 4.7                                                 | Contraintes principales et changement de repère.....       | 104        |
| 4.8                                                 | Intérêt des contraintes principales.....                   | 108        |
| 4.9                                                 | Etat de contraintes planes – Cercle de Mohr.....           | 108        |
| 4.10                                                | Cercle de Mohr en trois dimensions.....                    | 114        |
|                                                     | Exercices.....                                             | 119        |
| <b>Chapitre 5 DEFORMATIONS.....</b>                 |                                                            | <b>137</b> |
| 5.1                                                 | Introduction.....                                          | 137        |
| 5.2                                                 | Exemples de déformations.....                              | 137        |
| 5.3                                                 | Gradients de déformations et déplacements.....             | 140        |
| 5.4                                                 | Tenseurs de déformation et déplacement.....                | 144        |
| 5.5                                                 | Hypothèse des petits déplacements.....                     | 150        |
| 5.6                                                 | Interprétation géométrique du tenseur de déformation.....  | 156        |
| 5.7                                                 | Equations de compatibilité.....                            | 161        |
| 5.8                                                 | Equations de constitution.....                             | 162        |
|                                                     | Exercices.....                                             | 163        |
| <b>Chapitre 6 LE MILIEU ELASTIQUE LINEAIRE.....</b> |                                                            | <b>183</b> |
| 6.1                                                 | Introduction.....                                          | 183        |
| 6.2                                                 | Equation de constitution d'un milieu solide élastique..... | 185        |
| 6.3                                                 | Problème de l'élasticité linéaire.....                     | 187        |
| 6.4                                                 | Module d'Young et rapport de Poisson.....                  | 189        |
| 6.5                                                 | Interprétation géométrique de $E$ et $\nu$ .....           | 191        |
|                                                     | Exercices.....                                             | 195        |
| <b>Chapitre 7 PROBLEMES D'ELASTOSTATIQUE.....</b>   |                                                            | <b>203</b> |
| 7.1                                                 | Introduction.....                                          | 203        |
| 7.2                                                 | Barre uniforme sou l'action de son poids.....              | 204        |
| 7.3                                                 | Flexion d'une barre.....                                   | 212        |
| 7.4                                                 | Cylindre aux parois épaisses : Problème de Lamé.....       | 217        |
| 7.5                                                 | Une autre approche – La fonction d'Airy.....               | 220        |
| 7.6                                                 | La fonction d'Airy – coordonnées cartésiennes.....         | 221        |
| 7.7                                                 | La fonction d'Airy – coordonnées polaires.....             | 224        |
|                                                     | Exercices.....                                             | 229        |

|                                                                       |            |
|-----------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Chapitre 8 PROBLEME DE TORSION.....</b>                            | <b>245</b> |
| 8.1 Introduction.....                                                 | 245        |
| 8.2 Problème de torsion de Saint Venant.....                          | 254        |
| 8.3 Application a une barre de section elliptique.....                | 257        |
| Exercices.....                                                        | 257        |
| <b>Chapitre 9 INTRODUCTION A LA THEORIE DE LA PLASTICITE.....</b>     | <b>265</b> |
| 9.1 Introduction.....                                                 | 265        |
| 9.2 Modèle mathématique.....                                          | 268        |
| 9.3 Limite élastique et fonction de fluage.....                       | 269        |
| 9.4 Invariants de tenseur des contraintes.....                        | 269        |
| 9.5 Critères d'écoulement de Von-Mises et de Tresca.....              | 270        |
| 9.6 Interprétation géométrique des critères de Tresca et von-Mises... | 274        |
| Exercices.....                                                        | 277        |
| <b>Chapitre 10 LE MILIEU FLUIDE.....</b>                              | <b>287</b> |
| 10.1 Introduction.....                                                | 287        |
| 10.2 Le fluide simple non-newtonien.....                              | 287        |
| 10.3 Le fluide newtonien isotrope.....                                | 293        |
| 10.4 Le fluide idéal.....                                             | 293        |
| 10.5 Introduction aux modèles rhéologiques.....                       | 294        |
| Exercices.....                                                        | 295        |
| <b>Chapitre 11 INTRODUCTION A LA DYNAMIQUE DES FLUIDES.....</b>       | <b>299</b> |
| 11.1 Introduction.....                                                | 299        |
| 11.2 Equations locales d'Euler.....                                   | 300        |
| 11.3 Equations de Helmholtz et de Bernoulli.....                      | 302        |
| 11.4 Théorèmes de Lagrange et Helmholtz.....                          | 306        |
| 11.5 Ecoulement irrotationnel.....                                    | 310        |
| 11.6 Equations de Navier-Stokes.....                                  | 315        |
| 11.7 Ecoulements parallèles.....                                      | 317        |
| 11.8 Introduction aux écoulements turbulents.....                     | 322        |
| 11.9 Equation de conservation de l'énergie.....                       | 324        |
| Exercices.....                                                        | 331        |
| <b>RAPPELS MATHÉMATIQUES.....</b>                                     | <b>347</b> |
| <b>BIBLIOGRAPHIE.....</b>                                             | <b>355</b> |
| <b>INDEX.....</b>                                                     | <b>359</b> |